


7752

DE MOTIBUS PLANETARUM
IN ORBIBUS EXCENTRICIS
SECUNDUM THEORIAM NEWTONIANAM
DISSERTATIO.

 *K*
Auctore GUIL. HALES, B. D.
Coll. S. Trin. Dublin. Socio.

Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes ;
Sol folio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri,
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris

HALLBY.

DUBLINII:

Excudebat JOSEPHUS HILL, 1783.

MURRAY PETERSON

IN ORIGIN & DEVELOPMENT

SECRET

OFFICIAL RECORD



2. A rapid increase in the number of cases of the disease in the United States, and a corresponding increase in the number of cases in other countries.

1991

LIBRARY

1981 JUL 20 1207

*CUM in explicandis corollariis propositionis
16, lib. 1. Principiorum, obscuritate quadam,
ob nimiam brevitatem, laborantibus, parum fe-
liciter, aut ne vix quidem, celeberrimi Autoris
vestigia secuti sunt hactenus interpretes; Acade-
micis nostris Philosophiæ Newtonianæ studiosis
me operam haud ingratam impensurum spera-
bam, si corollaria hæc, pulcherrima sane, atque
uberrima expedire tentarem. In hunc finem igi-
tur, aggressus sum ipsius Autoris sensum, clausulis
interpositis, notulisque nonnullis adhibitis, expre-
mere; atque theoriæ motuum planetarum in or-
bitis excentricis inde deducere. Si tentamen hoc,
qualecunque sit, æquo accipient animo, forsan, si
modo a gravioribus detur vacatio, alia insuper,
præcipuis quibusdam Philosophiæ Newtonianæ
partibus illustrandis inservientia, in eorum usum
typis posthac mandare non pigebit.*

Trin. Coll. Dublin. Aug. 2, 1782.

4 OC 58

NEWTONI PRINCIP.

LIB. I. PROP. XVI.

IISDEM positis, [scil; quod corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiae locorum a centro;] & actis ad corpora lineis rectis quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularorum inverse, et subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendicularum SY, & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{SY^2}{L}$.

Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus (a), hoc

(a) Velocitas quæ describitur arcus PQ utpote quam minimus, pro uniformi haberi potest, ergo, dato tempore quam-minimo, erit ut spatium. Notandum est, quod arcus duarum pluriumve orbitarum circa centrum commune descriptarum intelligendi sunt, et velocitates quibus describuntur conferendæ inter se, licet *Newtonus*, brevitatis gratia, unam tantum designat. Quod in sequentibus quoque observandum. Porro, definitionem *Newtonianam* de usu voculæ ut, (*Lemma 10, Scholium.*) subungere haud importunum erit. “ Si “ quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, et earum aliqua dicatur esse ut est alia “ quævis

est (per lem 7) ut tangens PR, id est, ob
 proportionales PR ad QT et SP ad SY (b), ut
 $\frac{SP \times QT}{SY}$, five ut SY reciproce et $SP \times QT$ di-

recte; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore
 descripta (c), id est (per Prop. 14.) in subduplicata
 ratione lateris recti. Q. E. D.

Cor. 1. Latera recta principalia sunt in ratione
 composita ex duplicata ratione perpendicularorum,
 et duplicata ratione velocitatum (d).

“ quævis directe vel inverse; sensus est, quod prior augetur
 “ vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum
 “ ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt
 “ aliæ duæ vel plures directe vel inverse; sensus est, quod
 “ prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur
 “ ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciproce au-
 “ gentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B
 “ directe et C directe et D inverse; sensus est, quod A
 “ augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C$
 “ $\times \frac{1}{D}$, hoc est, quod A et $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione
 “ datâ.”

(b) Propter angulos ad Y et T rectos, et angulum
 ad P, communem, erunt triangula PQT, PSY, similia,
 adeoque, $PR : QT :: SP : SY$, et $PR = \frac{QT \times SP}{SY}$.

(c) Nam rectangulum $SP \times QT$ est duplum areæ SPQ, per
 El. lib. 1. prop. 41.

(d) Nam. per prop. L $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SY^{\frac{1}{2}}} : 1^{\frac{1}{2}} :: V : v$.
 $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SY^{\frac{1}{2}}} : 1^{\frac{1}{2}} :: SY \times V : sy \times v$.
 $L^{\frac{1}{2}} : 1^{\frac{1}{2}} :: (SY \times V)^2 : (sy \times v)^2$.

Cor. 2. Velocitates corporum [in verticibus principalibus, hoc est, per *Ham. Con. lib. 2, prop. 11, cor. 2, et prop. 14*] in maximis et minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse, et subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiae.

Cor. 3. Ideoque velocitas in sectione conica [vertice principali, h. e.] in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam. [Nam dupla distantia est diameter vel latus rectum circuli,]

Cor. 4. Corporum in ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per *cor. 6, prop. 4*) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam [velocitates corporum in ellipsis gyrantium sunt in ratione composita ex ratione perpendicularorum inverse, et subduplicata ratione laterum rectorum directe, sed] perpendiculara jam [scilicet in mediocribus distantis ab umbilico communi] sunt semiaxes minores, et hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias et latera recta (*e*). Componatur hæc ratio in-

(*e*) Sunt enim ad medias proportionales in ratione subduplicata unitatis ad numerum binarium. Nam designantibus *A* et *a* distantias mediocres, five semiaxes majores; *B* et *b*, semiaxes minores, erit, $A : B :: 2B : L$

$$2B^2 = AL$$

$B\sqrt{2} = \sqrt{AL}$ seu Med. proport.

$$\text{Sed } B : B\sqrt{2} :: 1 : \sqrt{2}$$

Et similiter, $b : b\sqrt{2} :: 1 : \sqrt{2}$, ergo, &c.

verse cum subduplicata ratione laterum recto-
rum directe, et fiet ratio subduplicata distantia-
rum inverse (*f*).

Cor. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris
diversis quarum latera recta principalia sunt
æqualia, velocitas corporis est reciproce ut per-
pendiculum demissum ab umbilico ad tangen-
tem.

(*f*) 1. Velocitates in ellipsis in mediocribus dist. sunt
in eadem ratione ac in circulis ad easdem dist. Nam,

$$V, E, \text{ in } A : v, e \text{ in } a :: \frac{L^{\frac{1}{2}}}{B} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{b} :: \frac{L^{\frac{1}{2}}}{(A \times L)^{\frac{1}{2}}} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{(a \times l)^{\frac{1}{2}}}$$

$$:: \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Sed, } V, C, \text{ ad } A : v, c \text{ ad } a :: \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$$

Ergo, &c.

2 Velocitas in ellipsi in med. dist. est eadem ac in cir-
culo ad eandem dist. Nam,

$$V, E \text{ in } A : V, C \text{ ad } A :: \frac{L^{\frac{1}{2}}}{B} : \left(\frac{2A^{\frac{1}{2}}}{A} = \right) \frac{\sqrt{2}}{A^{\frac{1}{2}}}$$

$$:: L^{\frac{1}{2}} \times A : (B\sqrt{2} =) L^{\frac{1}{2}} \times A$$

hoc est in ratione æqualitatis.

Notandum est, quod angulus *projectionis* (contentus utique
tangente per corpus et radio per contactum a centro virium
ducto) corporis in ellipsi revolventis in transitu ab apside
summa ad imam fit *minimus* in mediocri distantia. Et in ge-
nere, velocitas in quavis trajectory seu orbita fit æqualis ve-
locitati in circulo ad eandem distantiam eadem vi centripeta,
ubi angulus *projectionis* fit *minimus*. *Macl. Flux. sect. 449.*

Cor. 6. In parabola velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiae corporis ab umbilico figurae; in ellipsi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam [per *Cor. præced.*] velocitas est reciproce ut perpendicularum; sed] (per *Lem. 14, Cor. 2*) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicata ratione distantiae: [ergo, &c.] In hyperbola perpendicularum minus variatur, in ellipsi magis (*g*).

Cor. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipsi minor est, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus *cor. 3*, velocitas in vertice parabolæ est [ad velocitatem in circulo ad eandem a centro distantiam in subduplicata ratione lateris recti principalis, sive quadruplæ illius distantiae ad duplam (*b*), adeoque] in subduplicata ratione nu-

(*g*) Nam in utrisque, perpendicularum est in ratione composita ex subduplicata ratione hujus distantiae directe, et subduplicata ratione distantiae corporis ab altero umbilico inverse: sed in hyperbola, simul augentur vel simul diminuntur hæ distantiae; in ellipsi, auctâ unâ, diminuitur altera, et vice versâ: ergo, &c. *Vid. Ham. Con. Sect. lib. 2. prop. 34. cor. 2.*

(*b*) Nam in parabola latus rectum principale est quadruplum distantiae verticis principalis ab umbilico; ut constat ex ipsa definitione umbilici, *Hamilt. Con. Sect. lib. 2. def. 3.* In ellipsi minus est, in hyperbola majus quadruplo illius distantiae: Nam in utrisque (per *Def. 2 et 4 ibid. et Elem. lib. 2. prop. 4.*) latus rectum principale æquatur quadrato axis minoris, sive quadruplo quadrato semiaxis minoris, sive quadruplo recti-
angulo

meri binarii ad unitatem ; et *per corollaria sextae* *hujus et propositionis 4*, servatur eadem proportio in *omnibus* distantiiis. [In ellipsi minor est, nam velocitas in *vertice propiore* ellipseos est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in subduplicata ratione laterum rectorum, (per *Cor. 3*) hoc est in minore quam subduplicata ratione quadruplæ illius distantiae ad duplam, sive binarii ad unitatem. Sed velocitas in vertice propiore est maxima, et in *aliis* distantiiis diminuitur magis quam in ratione subduplicata distantiarum reciproce, (per *Cor. præced.*) dum in hac tantum ratione diminuitur velocitas in circulis ad easdem distantias : (Ergo, &c.) In hyperbola vero major, ob latus rectum majus quadruplâ *illâ* distantia, et velocitatem in *aliis* distantiiis diminutam minus quam in circulis ad easdem distantias.] Hinc etiam in parabola velocitas *ubique* æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbola major (*i*).

angulo sub segmentis axis majoris inter umbilicum et vertex—applicato ad axem majorem: et proinde, instituendo analogiam, erit latus rectum principale ad quadruplum distantiae verticis propioris ab umbilico, ut distantia verticis remotioris, ad axem majorem. Cæterum in ellipsi distantia posterior minor est, in hyperbola major axi. Ergo, &c.

(*i*) Nam velocitas in parabola, est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam, ut $\sqrt{2}$ ad 1 ; sed velocitas in hoc circulo est ad velocitatem in circulo ad dimidiam distantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$: Ergo fiet ex æquo, velocitas in parabola ad velocitatem in circulo ad dimidiam distantiam in ratione $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{2}$, hoc est in ratione æqualitatis. In ellipsi autem minor, nam velocitas in ellipsi est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in minore ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1 ; sed velocitas in hoc circulo est ad velocitatem in circulo

ad

Cor. 8. Velocitas gyrantis in sectione quavis conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum; (Patet per *cor. 5.*)

Cor. 9 Unde cum (per *cor. 6, prop. 4*) velocitas gyrantis in hoc circulo, sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum: fiet ex æquo, velocitas gyrantis in conica sectione, ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem et semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum (*k*).

Pendent hæc omnia ex *hypothesi*, quod corpora in sectionibus conicis gyrantia agitantur vi centripeta quæ sit reciproce in duplicata ratione distantiarum ab umbilico communi tanquam centro virium; qualem in systemate mundi revera obtinere ex phænomenis colligitur.

Nam *primo*, planetæ primarii, radiis ad solem ductis areas temporibus proportion-

ad dimidiam distantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$: ergo fiet ex æquo, velocitas in ellipsi ad velocitatem in circulo ad dimidiam distantiam minor quam in ratione æqualitatis $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{2}$. Et similiter, in hyperbola major.

$$(k) \text{ Vel sect. Con. : Vel, C, } \frac{1}{2}L :: \frac{1}{2}L : SY.$$

$$\text{Sed, Vel C, } \frac{1}{2}L : \text{Vel C, } \propto q. D :: \sqrt{D} : \sqrt{\frac{1}{2}L}$$

$$\text{Ex } \propto q. \text{ Vel sect. Con. : Vel C, } \propto q. D :: \sqrt{D} \times \frac{1}{2}L : SY \times \sqrt{\frac{1}{2}L} \\ :: \sqrt{D} \times \sqrt{\frac{1}{2}L} : SY.$$

ales describunt ; unde (per *prop.* 2.) vires quibus perpetuo retrahuntur a motibus rectilincis, et in orbibus suis retinentur, solem tanquam centrum virium respiciunt. 2do, Horum tempora periodica sunt in sesquuplicata ratione mediocrium distantiarum a sole ; unde (per *prop.* 4, *cor.* 6 et 8.) vires horum centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro : et proinde 3tio, (per *prop.* 13, *cor.* 1) (1) in aliqua sectionum conicarum umbilicum habente in centro solis moventur. At hæc 4to, necessario erit ellipsis ; cum in orbem redire solent planetæ, quod utique non pateretur orbita parabolica vel hyperbolica. Porro, solem in centro ellipseos haud locari, (per *prop.* 10, *cor.* 1) manifest-

(1) “ *Newtonus* in *prop.* 11, 12, & 13. *lib.* 1. elegantissime demonstravit vires centripetas corporum in sectionibus conicis motorum circa focos esse reciproce in duplicata ratione distantiarum a focus ipsis. Inde vero in *Cor.* 1. *prop.* 13. vicissim collegit quod si vires sint reciproce ut quadratum distantiae a puncto aliquo, corpus circa ipsum punctum veluti focus sectionem conicam describet : quia scilicet dato umbilico, puncto contactus, et positione tangentis, describi potest sectio conica quæ curvitatē datā habeat ad punctum illud : datur autem curvitas ex data vi centripeta et velocitate corporis : et orbes duo se mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate describi nequeunt. Quæ licet *Johannes Bernoullius* peculiari demonstratione indigere existimaverit in *actis Parisiensis Academiæ* anni 1710, ex se tamen manifesta sunt : data enim positione tangentis, velocitate, ac vi centripeta, data jam et determinata est omnis a tangente ipsa deflexio. Alia directi atque inversi problematis centripetarum virium solutiones dederunt *Cotesius*, *Moiwraus*, *Bernoullius*, *Hermannus*, *Eulerus*, aliique. Nos peculiarem solutionem dedimus in *prop.* 39.” *Frisius de gravitate universali corporum*, pag. 111, 112.” Determinatur infra *Prob.* 2, species sectionis conicæ pro variis velocitatibus angulisque projectionis.

um est. Uti ex phænomenis quoque constat, nam sole in centro ellipsos versante, planeta bis singulis revolutionibus in aphelio, scil: ad extremitates axis majoris cerneretur; bis in perihelio, scil: ad extremitates axis minoris; contra experientiam. Hæc omnia de secundariis quoque circa primarios suos revolventibus, consequuntur.

De cometis quidem, utrum meteora forent, corpora caduca, an ordinibus planetarum adscriberentur; utrum in lineis rectis, circulis, an parabolis moverentur, diu hæserunt celeberrimi astronomi quam vetustiores tam recentiores. Tandem ille, (qualem naturæ et motuum cometarum interpretem fore aliquando, non irritò auguratus est *Seneca*) *Non sordidus auctor naturæ verique—Newtonus*, quum spectasset, quod satis frequentes sunt cometarum adventus, nec eorum ullus reperiatur motu ferri hyperbolico, seu velociore quam cadendo ad solem acquirere debeat; quodque per omnes cœlorum partes liberrime feruntur, et motus suos etiam contra cursum planetarum diutissime conservant: itémque in animo revolvisset, quod si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes solis terræ et planetarum, cum in periheliis suis calorem immensum ad solem concipere possent, statim dissipari debuissent; exemplo usus cometæ insignis qui sub finem Anni 1680 per quatuor menses continuos apparuit, cujus distantia a sole in perihelio suo *Dec. 8*, minor prodibat parte sexta diametri solis, ideoque calorem quasi 2000 vicibus majorem quam calor ferri candentis concipere posset: suspicatus est, cometas genus planetarum esse, quorum corpora sunt solida compacta fixa et du-

tabilia instar corporum planetarum; atque motu perpetuo in orbibus valde excentricis circa solem revolvi.

Ex phænomenis equidem non satis constabat arearum descriptionem esse temporibus accurate proportionalem, nec tempora periodica esse in ratione sesquuplicata distantiarum a sole; cum in regionibus nostris paulum immorentur cometæ, et solem, si unquam, non nisi ex ingentibus intervallis revisunt. Cognitis vero motuum principiis, ex his *a priori* collegit *Newtonus*. Quoniam enim cometarum pondera in solem, planetarum instar, per *prop. 8, lib. 3.* sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro solis, moventur per *cor. 1, prop. 13, lib. 1.* in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus; et proinde, per *prop. 1, lib. 1.* radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt; unde, si in orbem redeant, orbis erunt ellipses; et tempora periodica horum per *prop. 15, lib. 1.* ad tempora periodica planetarum, in semiaxium principalium seu mediocrium a sole distantiarum ratione sesquuplicata.

Porro, cum ad hanc pulcherrimam theoriam de perpetuo cometarum in orbem recurso stabilendam postularetur collatio cometarum inter se qui diversis temporibus apparuere, (si plures enim cometæ post æqualia temporum intervalla eundem orbem descripsisse reperiuntur, concludendum erit, hos omnes esse unum eundemque cometam in eodem orbe revolventem) perfecit hoc socius *Newtono* dignissimus, *Halleius*; cujus methodum egregiam, in *Tabulis Astronomicis* Anno 1749, sive iterum 1759 auctius a *De la Lande* Gallice editis delineatam

delineatam, paulo fufius referre lectorem Aftronomicum forfan non pigebit.

Concinnatâ jam plures ante annos elementorum 24 cometarum in orbibus parabolicis fynopfi, ftatim subodoratus eft *Halleius*, ex fitu confimili planorum et periheliorum, unum eundemque fuiſſe cometam in orbe elliptico revolutum qui anno 1531, a 13 die *Auguſti* ad 23 ejufdem menſis ab *Apiano* obſervatus eſt; iterumque anno 1607 a *Sept.* 16 ad *Octob.* 16, a *Keplero* et *Longomontano*; ac tertia vice, a ſeipſo viſus, anno 1682, atque a *Flamſtedio* obſervatus ab *Aug.* 19 ad *Sept.* 9. unde prodierunt tempora perihelia ſingulis hiſce annis, *Auguſti* 25; *Octobris* 16; atque *Septembris* 4 reſpective. Verrum cum periodorum et inclinationum diverſitas aliquanto nimia huic ſuſpicioni adverſari videretur; ac priorum *Apiani* et *Kepleri* obſervata parum accurata, tam ſubtili negotio enucleando vix paria eſſe judicaret; contentus erat, cum hanc ſynopſin prima vice, anno ſcilicet 1705 ederet, conceptus ſuos aliqua ſaltem probabilitatis ſpecie ſultos indicaffe, Poſterosque ut reditum ejus juxta annum 1758 expectandum ſedulo præſtolarentur, monuiſſe. Poſtea vero quam evolutis cometarum antiquiorum catalogis, tres alios deprehenderat eodem plane ordine, paribusque temporis intervallis præceſſiſſe, (nempe anno 1305 circa *Pafcham*; anno 1380 ſed incerto menſe; ac deinde anno 1456 menſe *Junio*) priorem ſententiam paulo audentius tueri cœpit. Et quoniam periodi ſingulæ vicibus alternis 76 et 75 annorum circiter provenire, ſumpta periodo media 75½ annorum, quæſivit orbem ellipticum in quo cometa tali tempore periodico revolvi poſſit: capiend

piendo nempe semiaxem majorem orbis cometæ ad mediocrem distantiam terræ a sole, in ratione subsestuplicata temporum periodicorum; per *prop.* 15. et inveniendò semiaxem minorem ex cognitis distantia periheliâ observationibus maxime congruâ, ac excentricitate. Deinde, loco orbis parabolici antea descripti, orbis hujusce elliptici elementa, (scilicet loca perihelii, et nodorum, inclinationem ejus ad planum eclipticæ, distantiam periheliam, et tempus æquatum perihelii, &c.) observatis *Flamstedii* de hoc cometa coaptare aggressus est; atque instituto calculo maxime laborioso, correctis insuper erroribus in ipsis observationibus, reformatis locis fixarum cometæ vicinarum, et quod præcipuum fuit, deductis refractionibus aereis prope horizontem variis quibus toto apparitionis suæ tempore implicabatur cometa, vix unquam visus 12 gradibus altior; collatisque itidem *Kepleri* et *Apiani* observatis; tandem, probe consentientibus trium cometarum elementis omnibus, collegit tres accessus diversos ejusdem cometæ ad solem terramque annis jam memoratis extitisse. Minime autem refragari censuit periodorum diversitatem ultimâ nimirum spatio plusquam annuo penultimam excedente, et inclinationem orbis cometæ 1682 minutis primis 22 majorem quam quæ motui cometæ anni 1607 competeret; cum hæc oriri possent a vi perturbante Jovis, cui nimirum cometa currente æstate anni 1681, jam cursu non adeo incitato solem petens, ita conjunctus fuit, et plures menses eidem ita vicinus, ut toto illo tempore parte quasi quinquagesima virium acceleratricum in solem, versus centrum Jovis simul urgeretur. Nec minores deprehenduntur inæ-

qualitates

qualitates in motibus planetarum. Inde feliciter ausus coniecit *Halleius*, cometam interjecta periodo longiore annorum 76 et amplius, circa finem anni 1758 vel initium proximi rediturum; inventique gloriæ patriæ suæ vindicat vir summus, “ Quocirca si secundum prædicta nostra redierit iterum circa annum 1758, hoc primum ab Homine *Anglo* inventum fuisse non inficiabitur æqua posteritas.”

Quoniam vero hujusce cometæ periodum annorum 75 tantum assignârunt clarissimi viri *Newtonus* * et *Eulerus* †, ut Solem revisere posset cometa anno 1757 circa mensem *Augusti*, haud parva expectatio astronomos incescit. Quo certius itaque præfiniatur tempus reditus, atque tollatur, quantum fieri posset, de hac re dubitatio, analysta hujus ævi ex peritissimis *Clairaut*, (hortante astronomo summo *De La Lande*, qui tabulas suas elementorum Jovis et Saturni, cæteraque ad calculum ineundum necessaria ministravit commodus) opus immensi laboris suscepit, computare scilicet secundum gravitatis theoriam, auspicatus ab anno 1607, quantam perturbationem motus cometæ

* “ Si cometæ hi duo fuerint unus et idem, revolvetur hic cometa spatio annorum 75 Hæc ita se habebunt si cometa spatio annorum septuaginta quinque in hoc orbe posthac redierit.” *Princip.* p. 524.

† “ [Ex medii ætherii resistantia] satis tuto colligimus tempora periodica cometarum satis notabiliter in quavis revolutione diminui debere, ita ut mirum non sit cometam 1682 primum post intervallum 76 annorum, postea vero post 75 annos ad perihelium rediisse—Simul vero patet ob hanc perturbationem locum perihelii mutari non debuisse.” *L. Euleri opuscula varii argumenti* Berlin. 1746, p. 276. Cæterum retardationem ex hac causa perexiguam esse debere, contra *Euleri* sententiam, plerique consentiunt Physici.

edere debuerit actio tam Saturni quam Jovis, in Cométam Solemque duplicis periodi decursu, annorum nempe 150 spatium; deinde ad minuendos errores ex approximatione oriundos, computavit quoque differentiam periodorum annis 1607 et 1682 absolutarum; et tandem computo immani finito mense Nov. 1758, edixit in *Dissertatione* quadam, *Journal de Sçavans*, Jan. 1759, cometam ad perihelium suum reversurum circa medium Aprilis 1759, 618 diebus utique tardius quam exigeret precedentis periodi ratio: nisi quatenus, ut ipse monet, quantitates exiguae approximatione necessariâ in tali computo neglectæ, variationem unius mensis circiter in perihelii articulo inducerent. Autoris locus est insignis.—“ On sent avec
 “ quels ménagemens Je présente une telle an-
 “ nonce, puisque tant de petites quantités négli-
 “ gées nécessairement par les méthodes de ap-
 “ proximation, pourroient bien en alterer le
 “ term d'un mois, comme dans le calcul des pe-
 “ riodes precedentes.” Quod autem tantâ modestiâ proposuit *Clairaut*, ingenti cum laude analystæ peritissimi, et summa astronomorum cum admiratione actu contigit; nam cometa redux, astronomorum vigilantiam elapsus, primo conspectus est in vicinâ *Dresden* a Rustico quodam, nomine *Palusch*, diebus 25 et 27 Dec. 1758; a *De Lisle* et *Messier*, *Parisiis*, non nisi sub finem *Januarii* anno 1759; et a *De la Lande*, *Aprilis* 2 et deinceps; compluribus ab Astronomis observatus, diversis in regionibus, crebris ex intervallis decursu 166 dierum a primo apparitionis suæ tempore Dec. 25, 1758, ad usque ultimum *Junii* 3, 1759: atque perihelium suum ingressus est die 13 *Martii*, diebus nempe 32 citius quam ex calculo præfiniverat *Clairaut*. Adeo fideliter theoriæ suf-

fragata est experientia. Hoc vero 32 dierum discrimen inter tempus perihelii verum et supputatum, seu calculo accuratius instituto, dierum 22 tantum, prorsus contemnendum evadit, imo summa cum admiratione prosequendum quasi criterium ἀκριβείας analyseos hodiernæ certissimum, si modo spectentur reliquorum corporum systematis solaris attractiones tam planetarum quam cometarum, medii ætherii resistantia, et aliæ forsan causæ ignotæ, quæ cometæ motus sensibilibiter perturbare debuerint. Trium mensium retardatio, computante *Clairaut*, in reditu cometæ 1759 ex sola Saturni attractione provenit; nec amplius dubitare licet, quin corporum cœlestium vel longe ab invicem distitorum mutux vigeant attractiones.—De Cometa anni 1759, non injuriâ gloriatur *De la Lande*, in *Dissertatione de reditu ejus, Mem. de l'Acad. 1759*. “ Cette Comete, Je ne pas crains de le dire, est venue assumer la triomphe d'Astronomie, & la gloire de l'esprit humain.”

Constat igitur ex hoc, et ex orbibus plurium cometarum ellipticis motus veros accurate designantibus, (vide *Principia* p. 520, &c.) cometas quoque plures in orbibus ellipticis, planetarum instar, moveri; et cum loca cometarum in trajectoriis parabolicis computata eorum locis veris probe respondent, indicio est orbes in quibus moventur permagnam excentricitatem sortiri. Ex cometis quidem quorum jam innotescunt periodi, cometa 1759, quasi Mercurius, arctiore orbe et breviori periodo solem ambit, et tamen quatuor pene vicibus altius excurrit Saturno; reliqui latius expatiantur et majori tempore revolvuntur. Expectantur reditus Cometæ 1661 circa

annum 1789 vel 1790; Cometæ 1556, circa annum 1848; et cometæ insignis 1680, circa annum 2254. Si autem redierint, Philosophiæ *Newtonianæ* de novo lumen accendent, *dignumque laude virum vetabunt mori*. Alii forsan cometæ periodos adhuc longiores sortiuntur. Prodiit axis cometæ anni 1744 infinitus, ex observationibus computante D. *Betts*, unde, si unquam, non nisi periodo longissimâ absoluta redibit; in parabola fortè vel etiam in hyperbola ex regionibus nostris penitus emigrare potest.

Veram trajectoriæ qua insistit cometa dum visibilis sit speciem, ex observationibus accurate institutis ope propositionis insequentis facile definire licet. *De la Caille, Astr. sect. 195. Edit. Robertsen.*

Corporis revolvantis in Sectione conica umbilicum habente in centro virium velocitas angularis in vertice principali, seu in minima ab umbilico distantia, est quadrupla velocitatis angularis in distantia ordinatim applicatæ ad axem per umbilicum transeuntis, si sectio sit parabola; minus quadruplâ, si ellipsis; magis autem quadruplâ, si sit hyperbola.

Nam, quoniam velocitates angulares sunt ubique ut quadrata distantiarum a centro virium reciproce, (m) erit velocitas angularis in vertice
ad

(m) Velocitates angulares corporis circa centrum virium gyrantis, seu anguli contenti radiis a centro ductis ad extremitates arcuum æqualibus tempusculis descriptorum, variantur ut arcus isti directe, et radii inverse; sed hi arcus, utpote bases arearum triangularium per *prop. 1.* æqualium, erunt reciproce ut perpendiculara in eosdem a centro virium demissa: ergo velocitates reciproce ut rectangula sub his perpendicularibus et radiis contenta, sive quadrata radiorum intermediarum arcus bisecantium, cum in dato quodam arcu, radius extremus, intermedius, et perpet-

ad velocitatem angularem in distantia ordinatæ axis per umbilicum, ut quadratum hujus ordinatæ ad quadratum distantiae verticis ab umbilico; hoc est, (cum hæc ordinata sit dupla distantiae verticis ab umbilico in parabola; minus duplâ in ellipsi; majus duplâ autem in hyperbola,) (n) quadrupla, &c.

His præmissis, ex observationibus quotidianis inter se collatis inveniatur perihelium, sive trajectoriæ locus ubi velocitas angularis sit maxima, necnon quantitas velocitatis in hoc loco pro data quadam temporis parte, puta 4 horis, interpolando nimirum observationes correspondentes ante et post; deinde, simili ratione inveniantur velocitates angulares in locis 90 gradibus hinc inde distantibus, quæ inter se æquales prodire debent: Si igitur velocitas in his locis sit quarta pars velocitatis maximæ, aut accurate aut quamproxime, cometa in parabola gyrabitur; si major quarta parte, in ellipsi; si minor, in hyperbola.

Expositis hætenus *corollariis prop. 16, lib. 1, Principiorum*; & ex corporum cœlestium motibus, exploratâ lege gravitatis seu vis centripetæ a *Newtono* positâ; itemque orbium specie in quibus gyrauntur planetæ & cometæ: superest ut orbium mutationes, variantibus lege vis centripetæ, ac velocitate quacum e dato exeant loco, expendamus, quo melius inde constet, le-

(n) Nam. (*per Hamilt. Con. Lib. 2. prop. 26.*) in omni sectione conica tota ordinata per umbilicum est dimidium lateris recti principalis; sed in parabola, latus rectum principale est quadruplum distantiae verticis principalis ab umbilico, in ellipsi minus quadruplo, in hyperbola majus quadruplo: (*per not. h*) ergo, &c

gem gravitatis jam positam in systemate mundi quam accuratissime valere. Quoniam vero non desunt, etiam hoc ævo, minuti quidam philosophi, astronomiam cometicam nedum fallaciæ sed etiam insipientiæ insimulantes, qui physicis leviter imbuti, profitentur se non concipere posse, qua vi cometa, quum apud perihelium suum tantum non in solem impegerit, salvo cursu se expedire valeat atque iterum ad regiones a sole longinquas ascendere; (Vide *Brydone's Tour*, &c. vol. 2, lett. 26) placet prius ex principiis allatis,

Planeta vel cometa in orbe excentrico revolventis alternum ad solem accessum & a sole recessum explicare.

Velocitas corporis in ellipsi gyrantis in mediocri distantia ab umbilico (per cor. 4) est eadem quæ ad corpus in circulo ad eandem distantiam retinendum requiritur, et proinde *minor* (per cor. 6) in apside summa, *major* in apside ima quam in circulis ad has distantias respective.

Hinc, in apside summa, planeta, tardius progrediendo, orbem circulo ad eandem distantiam interioriorem describet; propiusque ad solem accedet, velocitate, ob attractionem solis quæ in consequentia dirigitur, perpetuo acceleratâ, donec ad apsidem imam pervenerit: exinde vero, velocius progrediendo, in orbem circulo, &c. exterioriorem excurrat; velocitate, ob solis attractionem jam in antecedentia tendentem, iisdem quibus modo creverat gradibus retardatâ, donec ad apsidem summam redierit. Atque hoc pacto, inter

inter apfides suas, si non obfaret medii transcurrenti resistentia, in æternum oscillaretur.

Quanquam verò in transitu planetæ a mediocri distantia ad apfidem imam, velocitas sit in mediocri distantia eadem, postea major quam quæ ad planetam in circulo retinendum requiritur, orbem etiamnum circulo interiore describet; ex eo quod angulus projectionis in mediocri distantia, ubi sit minimus, prodit acutus, restatque minor recto (h. e. angulo projectionis in circulo) ad usque apfidem imam. Contra, in transitu a mediocri distantia proxime insequente ad apfidem summam, velocitate licet languidiore, orbem circulo exteriorem describet, ob angulum projectionis recto majorem.

Liquet igitur planetam seu cometam in orbe proprio retineri, non vi centripeta in centrifugam subinde conversâ, ut somniantur minuti Philosophi, sed vi quadam projectili ex motu cometæ primitus impresso genitâ, et pro hoc aucto vel diminuto, variabili, quæ contra solis attractionem, exquisitissimo æquilibrio ubique servato, resistit atque repugnat.

Pergamus jam orbium mutationes, ex variatione velocitatis qua recta contendunt planetæ, viriumque centripetarum quibus agitantur oriundas investigare.

P R O B. I.

Urgente vi centripeta, cujus quantitas absoluta sit cognita, secundum quamlibet distantie rationem, velocitatem projectionis quæ requiritur ad corpus in dato circulo retinendum, determinare.

Sit

Sit x spatium quod corpus æqualiter accelerato motu cadendo versus centrum conficere debet quo velocitatem quæsitam acquirat, hac sola vi centripeta constanter urgente ab initio casus; tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisita, corpus percurreret arcum circuli æqualem $2x$; sed erit hic arcus medius proportionalis inter d diametrum circuli, et x descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum: erit idcirco $4x^2 = dx$. unde erit $x = \frac{1}{4}d$. h. e. quartæ parti diametri.

Cognitâ jam velocitate absolutâ in uno circulo innotescit in altero quovis. Nam velocitates diversis in circulis sunt ut arcus æqualibus temporibus quamminimis descripti; h. e. (ex naturâ circuli) ut mediæ proportionales inter diametros circulorum, et arcuum sinus versos; sive inter radios, et duplos sinus versos virium centripetarum exponentes (o).

(o) Efficacia sive intensio vis alicujus constanter agentis proprie exponitur per velocitatem quam motu æqualiter accelerato generaret in dato corpore, dato quodam tempore; sed hæc velocitas mensuratur per spatium percursum eadem cum velocitate uniformiter continuatâ, tempore quodam dato; et hoc spatium semper *duplum* prodit descensus corporis eadem data vi, eodemque tempore cadendo confectum: propria igitur mensura vis centripetæ est arcus quamminimi data temporis particula descripti duplus sinus versus. Cæterum ubi vires inter quas instituitur comparatio omnes eodem modo computantur ex nascentibus seu quam minimis sagittis arcuum simul descriptorum, parum refert utrum sagittæ ipsæ, vel harum duplæ tanquam virium exponentes adhibeantur, cum in utroque casu ratio sit eadem. Vide *Simpson's Fluxions*, vol. 1, p. 237; et *De La Lande Astr.* § 332.

Hinc,

Hinc, cum vires quibus in solem tendunt planetæ, in orbibus fere circularibus (excepto Mercurio) revolventes, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a sole; substituendo quadrata distantiarum reciproce loco virium, erit velocitas planetæ remotioris a sole minor quam propioris, in ratione subduplicata distantiarum reciproce. Ut si diameter orbis Jovialis sit quintuplo major quam diameter orbis terræ, erit velocitas Jovis minor quasi semissi velocitatis qua cursum suum peragit terra.

Porro, quoniam cometarum orbis parabolis sunt adeo finitimi ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possunt; calculus autem in parabola prodit facilior (*p*): erit (per *cor.* 7.) velocitas cometæ omnis semper ad velocitatem planetæ cujuscvis circa solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiae planetæ a centro solis, ad distantiam cometæ a centro solis quamproxime (*q*). *Lib.* 3, *prop.* 40, *cor.* 2 & 3.

(*p*) Parabolæ omnes sunt curvæ similes, adeoque radii vectores singularum similiter positi erunt in eadem ad invicem ratione. Cognitis igitur distantis periheliis diversorum cometarum, horum motus in trajectoriis parabolicis secundum eandem tabulam generalem computari possunt; cæterum ellipses singulæ proprium calculum desiderant. *De la Lande Astr.* § 3024.

(*q*) Sit. A distantia cometæ a centro solis, B planetæ cujuscvis distantia;

Vel, cometæ : Vel, pla. ad A :: $\sqrt{2}$: 1. Per *cor.* 7.

Vel, pla. ad A : Vel, pla. ad B :: \sqrt{B} : \sqrt{A} . Per *preced.*

Vel, cometæ : Vel, pla. ad B :: $\sqrt{2B}$: \sqrt{A} .

P R O B. II.

Posito quod vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiarum, variantibus velocitate quacum corpus projicitur, anguloque projectionis determinare orbis speciem.

I. Sit angulus projectionis rectus. Si velocitas sit *æqualis* velocitati quæ ad corpus in circulo ad eandem distantiam a centro virium retinendum requiritur (r), orbitam circula rem describet. Sit *minor* hac *quavis* ratione, describet ellip sin circulo interiorem, cujus apsis summa erit data distantia, magis minusve curvam pro veloci tate projectionis diminuta vel aucta. Sit *major*, in ratione quæ sit *infra* $\sqrt{2}$ ad 1 five 1,4142 ad 1 fere, ellip sin adhuc describet circulo exte riorem, cujus apsis ima erit data distantia, ma gis aut minus &c. *Attingat*, vel *excedat* rationem $\sqrt{2}$ ad 1, parabolam describet in priore casu, in posteriore hyperbolam. II. Sit angulus pro jectionis obliquus. Si velocitas *varietur* ut an tea, describet corpus ellip sin parabolam aut hy perbolam respective, quam antea curviorem; et quo major obliquitas, cæteris paribus, eo major curvatura. Hæc omnia ex *cor. 7.* manifesta sunt.

Iisdem positis, orbem a corpore revolvente de scriptum invenit *Newtonus prop. 17.* cujus metho dum haud prima facie manifestam expedire libet.

Quoniam corpus de loco dato secundum rec tam positione datam cum velocitate quacunque data egrediens, cogente vi hujusmodi centri-

(r) Quanta hæc sit, vide *Prob. 1.*

peta

peta cujus quantitas absoluta datur, in aliquam conicam sectionem umbilicam in centro virium habentem deflectetur; per *cor. 1. prop. 13.* ad determinandam hujus speciem, 1. invenit *Newtonus* latus rectum ejus principale, fingendo corpus in orbita quavis data circa idem centrum virium gyrationis; cujus idcirco datur latus rectum principale, et cognoscatur per *prob. 1, hujus, et cor. 9,* corporis gyrantis velocitas: nam erit, per *cor. 1.* latus rectum quaesitum ad latus rectum principale orbitae, in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularium in conicam sectionis orbitaeque tangentes demissorum et duplicata ratione velocitatum, atque ideo datur. 2. Invenit alterum umbilicum, investigando distantiam ejus a corpore, tum *positione* respectu tangents, tum *longitudine* respectu summæ distantiarum corporis ab umbilicis, pro diversis valoribus lateris recti principalis ex diversa velocitate (si cætera maneant) oriundis. Nam si ea sit velocitas, ut distantia umbilici remotioris a corpore prodeat minor hac summa, umbilici ad eandem partem tangents jacebunt, ideoque figura erit ellipsis, axem habens principalem huic summæ æqualem; abeunte in infinitum umbilico remotiore, figura erit parabola axem habens huic distantiae parallelum; quod si corpus majori adhuc cum velocitate exeat de loco suo, adeo ut fiat major hac summa, transferetur umbilicus remotior ad alteram tangents partem, ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit, hyperbola axem habens principalem æqualem differentiae distantiarum ab umbilicis: verum ex his datis in unoquoque casu inveniri potest conicam sectionem quam corpus tali vi, &c. describet.

Hinc, si corpus moveatur in sectione quacunque conica, et ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam exhibit. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, et ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Denique, ex dictis constat planetas ubique cursus suos circa solem in circulis peragere non posse, nec cometas in parabolis. Nam motus in circulo est æquabilis, ideoque ob quamcunque motuum perturbationem, cui nimirum obnoxii sunt planetæ, ab actionibus in se mutuis, accessu cometæ, medii in quo moventur resistentiâ, aut forsan aliis ignotis causis, si velocitas planetæ in circulo revolventis, utcunque diminuatur, vel si (modo limitem $\sqrt{2}$ ad 1 non attingat) augeatur, in ellipsin migrare debet. Et similiter, cum velocitas in parabola sit certa quadam lege variabilis, scilicet; ad velocitatem in circulo ut $\sqrt{2}$ ad 1; si cometæ in parabola gyrantis velocitas ab hoc limite utcunque deficiat, vel hunc utcunque exsuperet, in priore casu ellipsin, in posteriore hyperbolam describere debet. Et per præced. cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget planeta vel cometa.

P R O B. III.

Variantibus vi centripeta secundum quamlibet distantiam rationem, velocitate projectionis, et directione secundum quam egreditur corpus; determinare orbitam.

In quavis orbita urgente vi centripeta secundum quamlibet legem distantiam, qualibet velocitate, et quolibet angulo projectionis; variabitur velocitas in omni parte orbitae in ratione datâ, scil. reciproce ut perpendicularum in orbis tangentem a centro virium demissum: (per *Prop. 1. Cor. 1.*) vel, corpore versante in maxima aut minima distantia a centro, reciproce ut hæc distantia. At in circulis, variante vis centripetæ lege, variabitur velocitas; ut ex *corollariis Propositionis 4tæ* manifestum est. Prout igitur velocitas in orbita diversis a centro distantibus fit æqualis, major, aut minor velocitate in circulis his distantibus, revolvetur corpus circa centrum, a centro recedet, vel ad centrum accedet. His præmissis,

Sit *1mo*, Vis centripeta in *simplici*, vel alia quavis ratione *minore* distantiam, reciproce; nulla velocitate finita, utcunque magnâ, projiciendum est corpus ut a centro semper recedat, sed ultimo revolvetur circa centrum. Sit enim in *simplici* ratione distantiam reciproce; tunc velocitas in circulis, omnibus a centro distantibus, fit eadem (per *Prop. 4. Cor. 5*): sed ascendente corpore crescit perpendicularum in orbitae tangentem demissum, atque idcirco retardatur velocitas in orbita, adeoque licet primo quantavis ratione exsuperet velocitatem in circulo ad eandem distantiam, tandem fiet isti

E

æqualis,

æqualis, atque ultimo minor; proinde, nunquam in infinitum excurrere potest, verum retro descendet centrum versus, non vero usque ad centrum; (nisi rectâ in centrum tendat) nam ob accelerationem velocitatis in descensu, ultimo superabit velocitatem in circulo, et proinde circa centrum, ascendendo et descendendo per vices, revolvetur. Sit in *simplici* ratione *distantiæ directæ*; tum velocitas in circulis crescit ut distantia directæ (per *Prop. 4 Cor. 3.*) unde citius quam in casu novissimo sistetur impetus excurrendi.—In *duplicatâ* autem *distantiæ directæ*, crescit velocitas in circulis in sesquuplicata ratione *distantiæ directæ*; ergo a fortiori, nunquam in infinitum abire potest, descendente autem corpore, fiet ultimo velocitas æqualis velocitati in circulo ad eandem distantiam, et proinde circa centrum revolvetur.

Sit 2^{do}, Vis centripeta in quavis ratione *distantiæ inter simplicem et triplicatam reciproce*, et velocitas quacum projicitur corpus justæ magnitudinis; (scil; ad velocitatem in circulo eadem distantia semper in *minore* ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1.) revolvetur inter apsidæ—quiescentes equidem, si in duplicata ratione reciproce; progredientes vero, si plusquam duplicatâ; regredientes si minus: uti infra ostendetur. Augeatur velocitas projectionis ita ut *atingat*, vel *excedat* rationem $\sqrt{2}$ ad 1; ascendente corpore perpetuo recedet a centro; descendente autem ad apsidem perveniet, et postea in perpetuum ascendet.

Sit 3^{tio}, Vis centripeta *reciproce in triplicata ratione distantia*; variatur velocitas in circulis hac vi in ratione *distantiarum reciproce*, hoc est, in eadem

dem ratione ac in orbita in maxima vel minima distantia. Sit igitur velocitas in orbita *æqualis* velocitati in circulo ad eandem distantiam, et si angulus projectionis sit *rectus*, circulum ipsum describet; si *obliquus*, si modo cœperit corpus descendere, nunquam perveniet ad apsidem imam seu distantiam minimam, sed descendet usque ad centrum; at si cœperit vel minimum ascendere, ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam: describet enim in utroque casu curvam, quæ *spiralis logarithmica* appellatur, secantem utique omnes radios a centro virium ductos in angulo projectionis dato, per *Prop. 9, & Prop. 45, Cor. 1.* Sit velocitas quantulacunque *minor majorve* velocitate in circulo; corpus vel infinitis revolutionibus ad centrum usque descendet in priore casu, vel ab eodem ascendet in posteriore. Velocitate vero amplius auctâ vel diminutâ, citius ascendet vel descendet.

Sit 4to, Vis centripeta in quavis *maiore* quam *triplicata* ratione *distantiæ reciproce*; nulla velocitate, utcunque exigua, fieri potest ut corpus circa centrum revolvatur. Nam velocitas in circulis decrescit in *maiore* ratione quam *distantiæ auctæ*, adeoque velocitas corporis ascendentis fit primo *æqualis*, deinde semper in posterum superabit velocitatem in circulo, et proinde a centro semper recedet; descendentis vero velocitas superatur a velocitate in circulo, et proinde paucioribus revolutionibus confectis ad centrum usque accedet quam in casu præcedente. Quo major autem dignitas distantiae cui fit vis centripeta reciproce proportionalis, eo citius usque ad centrum descendet, vel a centro ascendet corpus.

Ex his patet, quod si corpus de apside ad apsidem per vices ascendens et descendens nunquam ad centrum appellat, urgeri potest vi quavis centripeta in *minore* quam triplicata ratione distantiae reciproce.

P R O B. IV.

Apsidum stationes, progressus, et regressus determinare.

Sit 1^{mo}, Vis centripeta *reciproce in duplicata ratione distantiae*; corpus dimidia revolutione descendet ab apside summa ad imam, et vicissim: adeoque quiescent apsidēs.

Nam velocitas corporis in ellipseos apsidibus erit reciproce ut distantiae, in circulis autem ad easdem distantias, reciproce in subduplicata distantiarum ratione; adeoque velocitas in apside ima *tantum* exsuperat velocitatem in circulo ad hanc distantiam, *quantum* superatur a velocitate in circulo ad apsidem summam; et proinde ob angulum projectionis in apside ima rectum, iterum ascendet corpus, et semiellipsin alteri consimilem describet. Ex. gra. Sit velocitas projectionis apud apsidem summam semissis velocitatis in circulo, et distantia corporis in apside summâ quadrupla distantiae in imâ; augetur quadruplo velocitas in orbe apud apsidem imam, dum duplo tantum augetur in circulo hac distantia: ergo, &c.

Sit 2^{do}, Vis in *maiore* quam duplicata ratione distantiae reciproce; crescit velocitas in circulis in *maiore* quam subduplicata ratione distantiae diminuta,

nutæ, et proinde velocitas in orbita in descensu ab apside summa difficilius superabit velocitatem in circulo ad eandem distantiam; non igitur ad apsidem imam perveniet corpus nisi plus quam dimidia revolutione; ferentur igitur apsidæ in consequentia: et quo major vis, eo citius. Ex: gra. Sit vis centripeta reciproce ut distantie dignitas cuius index est $2 \frac{4}{243}$, vel $2 \frac{1}{604}$, et quæ idcirco vicibus $59\frac{1}{2}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit; (quanta prodit ratio vis centripetæ lunaris ab actione solis perturbatrice oriunda) corpus, hac vi, pergendo ab apside summa ad apsidem summam conficiet revolutionem integram et præterea gradus tres: ideoque apsis illa (lunaris scilicet,) singulis revolutionibus conficiet in consequentia gradus tres. Sit vis reciproce ut distantie dignitas cuius index est, $2 \frac{5}{9}$, vel $2 \frac{3}{4}$, vel $2 \frac{15}{16}$, vel $2 \frac{63}{64}$; corpus revolutionibus $1\frac{1}{2}$, vel 2, vel 4, vel 8, de apside summâ egrediens ad apsidem summam redibit.

Sit 3tio, Vis in ratione *quavis minore* quam duplicata distantiarum reciproce; crescit velocitas in circulis in minore quam subduplicata ratione distantie diminutæ, et proinde velocitas in orbita facilius superabit velocitatem in circulis; adeoque corpus ad apsidem imam descendet minus quam dimidia revolutione; ferentur igitur apsidæ in antecedentia: et quanto minor vis, tanto citius. Ex. gr. Si vis sit reciproce ut distantie dignitas cuius index est $1 \frac{2}{9}$; corpus tribus quartis partibus revolutionis unius ad apsidem eandem redibit. Si reciproce ut distantia; ad eandem redibit peractis gradibus $254. 33' 30''$. Si reciproce

proce ut distantiae dignitas cuius index est 4; duabus tertiis partibus revolutionis unius absolutis redibit. Porro, si sit directe ut distantia; dimidia revolutione. Si ut dignitas distantiae directe cuius index est 6, vel 13; una tertia vel una quarta revolutionis parte ad eandem apsidem revertetur corpus. *Petuntur hæc, et præcedentia exempla ex corollariis prop. 45.*

Conversim igitur, ex quiete apheliorum planetarum concludere licet, horum pondera in solem rationem duplicatam distantiarum reciproce accuratissime servare; ex dictis enim constat, quod aberratio quælibet ab hac lege, motum apheliorum sensibilem induceret. Ab actionibus in se mutuis planetarum aphelia aliquantulum in consequentia respectu fixarum moventur, verum hi motus non nisi sæculis interjectis deteguntur, et ob parvitatem contemni possunt; ideoque in *Tabulis Carolinis*, quas edidit *Street*, prorsus negliguntur. Inter astronomos autem qui hosce motus ad calculum revocare satagunt, haud parvæ existunt lites. Ipse *Newtonus*, motum aphelii martis, unde tanquam ex modulo, motum apheliorum cæterorum per theoriam gravitatis deducit, *Lib. 3, prop. 14*, primo, ut referunt *Cyclopædiæ Parisiensis editores*, statuit $1^{\circ} 58' 20''$; postea vero, $33' 20''$ singulis in annis centenis. At determinatio prior magis quadrat cum observationibus recentissimis; ideoque numeris *Newtonianis* motus apheliorum planetarum exponentibus, omnino refragantur recentiorum conclusiones. Statuit *De La Lande*, motum sæcularem aphelii mercurii $1^{\circ} 57' 40''$; Veneris $4^{\circ} 10'$; Martis $1^{\circ} 51' 40''$; Jovis $1^{\circ} 43' 20''$; et Saturni $2^{\circ} 23' 20''$.

De

De motu item sæculari aphelii Veneris, quindécim nonnumquam gradibus inter se variari astronomorum conclusiones, testatur *De La Lande*. Notatu veruntamen dignissimum est, quod ex *Hipparchi* observationibus de positione aphelii Terræ annis 140 A. C. institutis, calculo inito, prodit aphelii motus annus $63''$; qualem actu statuunt astronomi celebres *Cassini* et *Monnier*, dum *De La Caille*, *Mayer*, et *De La Lande* hunc motum $65\frac{1}{2}''$ vel $66''$ referunt. Prodit autem motus apogæi Lunaris, qui omnium maximam refert inæqualitatem, $3^{\circ} 3'$ in consequentia singulis revolutionibus mensuris; quantum ex propriis observationibus olim determinarunt *Hipparchus* et *Ptolemæus*; at hic motus fere contemnendus. Stabilitur insuper lex gravitatis a *Newtono* posita, ex motu lentissimo perihelii cometæ 1759: erat enim hujus perihelium anno 1531, in 10s. $1^{\circ} 38'$; anno 1607, in 10s. $2^{\circ} 16'$; anno 1682, 10s. $2^{\circ} 52' 45''$; atque anno 1759, in 10s. $3^{\circ} 8' 10''$.

Denique, nequaquam satis admirari poterit homo cordatus, eximiam Optimi Maximi corporum cælestium Conditoris ac Moderatoris sapientiam, qui vires quibus recta contendere nituntur planetæ, ponderibus in solem, exquisitissimo inter se æquilibrio ita refrænavit et coercuit, ut compluribus interjectis sæculis integri adhuc vigent horum motus; quum aberratio ab hoc quam minima, licet perturbationem motuum in singulis revolutionibus insensibilem induceret, in pluribus notabilem, ultimo enormem efficere deberet. Deprehendit *Halleii* sagacitas, collatis observationibus eclipsium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* et cum

cum hodiernis, motum medium lunæ cum motu diurno terræ collatum, paulatim accelerari. Statuit autem *De La Lande*, *Mem. Acad.* 1757. hanc accelerationem prodire unius tantum gradus spatio 2000 annorum; et proinde periodum lunarem 22^m breviorē jam evasisse quam annis 2000 retroactis. Spectatis igitur parvis inæqualitatibus motuum planetarum atque cometarum, colligere cum *Newtono*, *Opt.* p. 378, fas sit, elegantissimam hanc nostri systematis compagem, haud ita in æternum permanfuram ut emendatione nunquam in posterum indigeat. Nec audiendi sunt *Leibnitz*, alique, qui Entis minus sapientis fore, contendunt, peritulum condere opus. Nonne innumera ubique extant summæ solertiæ exempla in structuris plantarum animaliumque caducis? Quanto melius mortalium sapientissimus, *Omnia mensurâ, numeroque et pondere temperasti* [*Deus!*] “Cæcum esse oportet, (ut
 “præclare *Cotesius*) qui ex optimis et sapien-
 “tissimis rerum structuris non statim videat
 “Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapien-
 “tiam et bonitatem; infanum, qui profiteri
 “nolit.”

4 00 58

F I N I S.

